

# APLICAÇÃO DA TEORIA ELEMENTAR DA PLASTICIDADE (TEP) NO FORJAMENTO EM MATRIZ FECHADA

Fábio Junkes Corrêa<sup>1</sup>  
Lírio Schaeffer<sup>2</sup>

## Resumo

Esse trabalho procura mostrar a sequência de cálculos e as interações realizadas para a construção de um modelo matemático a partir da Teoria Elementar da Plasticidade (TEP) para o processo de forjamento em matriz fechada. A TEP foi aplicada para dois corpos de prova cilíndricos de dimensões distintas e com volumes equivalentes. Ambos os corpos de prova foram forjados em matriz fechada, formando um flange conforme as dimensões da matriz empregada no forjamento. Por fim, obtiveram-se os valores dos esforços de compressão requeridos pela prensa de forjamento para ambos os casos, diferenciando-se por apresentarem geometrias iniciais diferentes.

**Palavras-chaves:** Forjamento; Matriz fechada; Teoria Elementar da Plasticidade.

## APPLICATION OF THE PLASTICITY ELEMENTARY THEORY (TEP) IN THE CLOSED DIE FORGING

## Abstract

This paper search to show the sequence of calculations and the interactions carried out to construct a mathematical model from the Plasticity Elementary Theory (TEP) for the process of closed die forging. The TEP was applied to two cylindrical specimens of different dimension sand with equivalent volumes. Both specimens were forged in closed die, forming a flange according to the dimensions of the die used in the forging. Finally, there was obtained the values of the compression efforts required by the forging press for both cases, distinguished by having different initial geometry.

**Keywords:** Forging; Closed die; Plasticity Elementary Theory.

## I INTRODUÇÃO

Forjamento é um processo de conformação mecânica na qual um corpo metálico é submetido a esforços de compressão com o objetivo de deformar o material conforme a geometria das matrizes. Esse processo de conformação pode ser classificado como forjamento em matriz aberta ou em matriz fechada. No forjamento em matriz aberta, o corpo de prova é conformado entre duas matrizes de geometrias relativamente simples de modo que apenas uma parcela do corpo seja conformada pelas matrizes, enquanto que no forjamento em matriz fechada o corpo de prova é completamente envolvido pelas matrizes. No primeiro caso o material conformado escoar de forma livre, já no segundo caso o material escoar de forma restrita pelas matrizes que envolvem o material<sup>1</sup>.

No forjamento, a relação entre as deformações e as tensões em um corpo de prova, submetido a esforços

de conformação, torna-se complexo e de difícil resolução. Além dessas duas variáveis principais, dependendo do caso, os problemas encontrados na conformação mecânica podem ser definidos em termos de forças, propriedades físicas e químicas do material, temperatura, concentrações de pressões, dentre outros. Essas variáveis podem ser relacionadas em um determinado modelo matemático, obtidos segundo diversos procedimentos, envolvendo vários níveis de reduções e aproximações com o intuito de chegar a resultados mais próximos da realidade. Usualmente, o problema se resume na resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, parciais, lineares e não-lineares, independentemente de sua característica mecânica dominante como elasticidade, plasticidade, conformabilidade, dentre outras. Normalmente, a resolução das equações diferenciais proporciona bastante detalhamento matemático, havendo uma enorme dificuldade

<sup>1</sup>Professor da UTFPR. Engenheiro Mecânico. Mestre em Engenharia Metalúrgica. Laboratório de Transformação Mecânica (LdTM), Departamento de Metalurgia, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil. [fabio.correa@ufrgs.br](mailto:fabio.correa@ufrgs.br)

<sup>2</sup>Prof. Dr. -Ing. Coordenador do Laboratório de Transformação Mecânica (LdTM), Departamento de Metalurgia, PPGEM, UFRGS. Av: Bento Gonçalves, 9500. CEP: 91501-970, Porto Alegre, RS, Brasil. [schaefer@ufrgs.br](mailto:schaefer@ufrgs.br)

para a obtenção de uma solução exata. Isso está relacionado com as características matemáticas de não-linearidade de algumas equações constitutivas e com a dificuldade em satisfazer certas condições de contorno [1].

Em meados dos anos 30 e 40, estudavam-se métodos numéricos baseados em teorias consistentes da plasticidade. As teorias baseadas na plasticidade foram desenvolvidas em função do carregamento e do escoamento, a partir de incrementos de tensões e deformações durante o forjamento. Entretanto, os valores resultantes da teoria da plasticidade se processam em função do carregamento que depende da tensão, da deformação e de outros fatores. No entanto, existem casos onde não são necessários programas computacionais por simulação numérica para a determinação dos valores de força e trabalho de conformação, possibilitando a aplicação de modelos matemáticos baseados na teoria da plasticidade [2].

Diversos pesquisadores têm usado diferentes métodos de análise para estudar o fluxo de metal durante o processo de conformação mecânica e estimar a carga de forjamento requerida para a operação. Esses métodos podem ser classificados como métodos analíticos e numéricos. Os resultados dos métodos experimentais vêm com o propósito de validar esses métodos em questão. Entretanto, tanto métodos matemáticos como numéricos têm como propósito reduzir o custo dos experimentos [3].

Em meios acadêmicos, medidas de otimização são estudadas com o propósito de reduzir custos nos processos de fabricação mecânica nas indústrias. Uma medida encontrada para a otimização dos processos é a simulação numérica. O uso da Teoria Elementar da Plasticidade (TEP) como método de otimização surge como alternativa à simulação numérica.

As noções básicas da TEP surgiram no ano de 1925 com Siebel e Karman para solucionar problemas de laminação. Nos anos seguintes Sachs estendeu a teoria para os processos de trefilação e extrusão, enquanto que Siebel e Pomp estenderam para o forjamento. No desenvolvimento desta teoria, certas condições são consideradas. As ferramentas de trabalho possuem simetria para a formação de uma peça forjada simétrica, as massas e forças de inércia das ferramentas podem ser desprezadas, dentre outras. A tensão de escoamento  $k_f$  é dada em função da deformação ( $\phi$ ), da velocidade de deformação ( $\dot{\phi}$ ) e da temperatura (T) [4,5].

A Figura 1 mostra um elemento infinitesimal em uma peça conformada para os três métodos conhecidos da TEP.

A partir da análise do equilíbrio de forças numa zona de qualquer geometria, chega-se a uma equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem. A Figura 2 mostra a decomposição das tensões para uma tira infinitesimal, selecionada do componente forjado mostrado na Figura 1a.

Dependendo da geometria do componente a ser forjado, podendo apresentar uma simetria plana ou axial, utiliza-se o método adequado a sua geometria. Nesta lógica, faz-se a discretização em elementos na forma de tiras, discos ou tubos, podendo prever o esforço em cada segmento. Para geometrias planas, usa-se o Método das Tiras (Figura 1a) e, para simetria axial, usa-se o Método dos Tubos (Figura 1b)

ou dos Discos (Figura 1c), diferenciando-se conforme o tipo de conformação. Para cada método há uma Equação (1-3) adequada como<sup>5</sup>:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \cdot \sigma_x [\tan(\alpha + \rho) - \tan(\alpha)] - \frac{2}{h} \cdot k_f \cdot \tan(\alpha + \rho) = 0 \quad \text{Método das Tiras} \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{r} \cdot \sigma_x [\tan(\alpha + \rho) - \tan(\alpha)] - \frac{2}{r} \cdot k_f \cdot \tan(\alpha + \rho) = 0 \quad \text{Método dos Discos} \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{h} \cdot \sigma_r [\tan(\alpha + \rho) - \tan(\alpha)] - \frac{2}{h} \cdot k_f \cdot \tan(\alpha + \rho) = 0 \quad \text{Método dos Tubos} \quad (3)$$

Onde,

$\sigma_x$  [N/mm<sup>2</sup>] = Tensão na direção x;

r [mm] = Distância do tira em relação a linha de centro;

h [mm] = Altura da tira;

$\alpha$  [rad] = Ângulo formado entre as tiras;

$\rho$  [rad] = Atrito interfacial entre as tiras;

$k_f$  [N/mm<sup>2</sup>] = Tensão de escoamento.

O Método das Tiras pode ser usado para o processo de laminação ou forjamento, onde há geometrias planas simétricas; o Método dos Discos se enquadra melhor para os casos de extrusão ou trefilação e o Método dos Tubos se adequa ao forjamento em matriz fechada com geometrias simétricas [6].

Neste trabalho, o método utilizado para desenvolvimento do procedimento matemático foi o método dos tubos (Equação 3), visto que este método é adequado ao forjamento em matriz fechada, tratando-se de uma geometria simétrica.

Antes de resolver a equação diferencial é necessário o conhecimento da temperatura, a determinação das deformações (Equação 4) e das velocidades de deformações (Equação 5) para poder encontrar o valor da tensão de escoamento (Equação 6) e, com isso, calcular as tensões localizadas do corpo forjado [6].

As deformações ( $\phi$ ) em cada elemento são calculadas por:

$$\phi_i = \ln \frac{h_0}{h_i} \quad (4)$$

Onde,

$h_0$  [mm] = Altura inicial

$h_i$  [mm] = Altura instantânea

As velocidades de deformações ( $\dot{\phi}$ ) em cada elemento são calculadas por:

$$\dot{\phi}_i = \frac{v_m}{h_i} \quad (5)$$

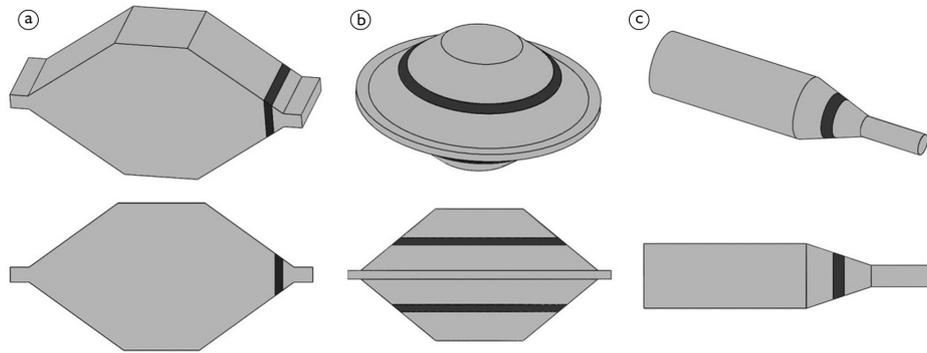
Onde,

$h_i$  [mm] = Altura instantânea

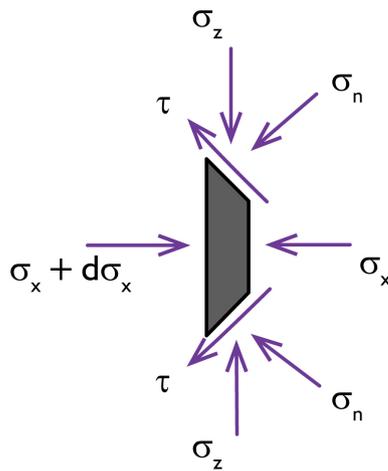
$v_m$  [m/s] = Velocidade da ferramenta

A tensão de escoamento em cada elemento ( $k_f$ ) é calculada por:

$$k_f_i = k_{f_0} \cdot e^{-m_1 \cdot T} \cdot \phi_i^{m_2} \cdot \dot{\phi}_i^{m_3} \quad (6)$$



**Figura 1.** Representação de um elemento infinitesimal em uma peça conformada. a) Peça conformada de simetria plana (uso do método das tiras). b) Peça forjada em matriz fechada (uso do método dos tubos). c) Peça extrudada ou trefilada (uso do método dos discos).



**Figura 2.** Decomposição das tensões de uma tira infinitesimal.

Onde,

$kf_i$  [N/mm<sup>2</sup>] = Tensão de escoamento;

$kf_0$  [N/mm<sup>2</sup>] = Tensão de escoamento inicial;

$T$  [°C] = Temperatura da peça a ser forjada;

$\varphi$  [-] = Deformação verdadeira;

$\dot{\varphi}$  [s<sup>-1</sup>] = Velocidade de deformação;

Os valores de  $m_1$ ,  $m_2$ , e  $m_3$  são constantes características do material obtidas através de regressão matemática de uma curva experimental. Dependendo do material usado, essas constantes podem apresentar valores distintos<sup>6</sup>.

A equação diferencial para o Método dos Tubos (Equação 3) pode ser simplificada em duas parcelas e resolvidas de forma independente segundo as Equações 7 e 8:

$$g(r_i) = \frac{2}{h_i} \cdot kf_i \cdot \tan(\alpha + \rho) \quad (7)$$

$$f(r_i) = \frac{2}{h_i} [\tan(\alpha + \rho) - \tan(\alpha)] \quad (8)$$

Resolvendo-as, possibilita a resolução da equação diferencial para o Método dos Tubos, calculando, deste modo, a variação da tensão radial (Equação 9) de um elemento em relação ao posterior:

$$\frac{\Delta\sigma_{r_i}}{\Delta r_i} + f(r_i) \cdot \sigma_{r_i} - g(r_i) = 0 \quad \Delta\sigma_{r_i} = \Delta r_i \cdot [g(r_i) - f(r_i) \cdot \sigma_{r_i}] \quad (9)$$

Entretanto, determinando-se as variações das tensões localizadas radiais de um tubo ao subsequente, obtém-se a tensão radial naquele determinado tubo, segundo a Equação 10:

$$\Delta\sigma_{r_i} = \sigma_{r_i} - \sigma_{r_{i-1}} \quad \sigma_{r_i} = \Delta\sigma_{r_i} + \sigma_{r_{i-1}} \quad (10)$$

A aplicação da teoria de Tresca, a partir da tensão radial e da tensão de escoamento de um determinado tubo, permite calcular a tensão normal (Equação 11) desse tubo:

$$k_{r_i} = \sigma_{z_i} - \sigma_{r_i} \quad (11)$$

A partir da tensão normal obtida em um determinado tubo, é calculada a tensão normal média (Equação 12) do tubo anterior com o seu subsequente:

$$\bar{\sigma}_{z_i} = \frac{\sigma_{z_i} + \sigma_{z_{i-1}}}{2} \quad (12)$$

Por fim, com as tensões localizadas média na direção normal à peça conformada, calcula-se a área superficial de contato (Equação 13) do tubo e, com isso, o esforço em cada tubo (Equação 14), possibilitando fazer um somatório para determinar o esforço máximo de forjamento da peça forjada:

$$\Delta A_i = \pi \cdot (r_i^2 - r_{i-1}^2) \quad (13)$$

$$F_i = \bar{\sigma}_{z_i} \cdot \Delta A_i \quad (14)$$

## 2 METODOLOGIA

Como mostra a Figura 3, foram selecionados dois tarugos cilíndricos (tarugo a e tarugo b) de dimensões distintas, porém com volumes equivalentes. Ambos os tarugos são constituídos pelo alumínio AA 6351. Esse material apresenta

boa resistência mecânica à deformação, média usinabilidade e média temperabilidade.

Em ambos os corpos de prova, os cálculos foram realizados para a mesma matriz (Figura 4), com a obtenção da mesma forma final, porém com valores de deformações e tensões diferentes em função das dimensões iniciais.

Para a inicialização do procedimento matemático da TEP são necessários os dados de entrada, como os dados do material indicados na Tabela 1 e os dados do processo indicados na Tabela 2.

O forjamento a quente foi considerado a uma temperatura acima da temperatura de recristalização e o atrito interfacial entre as matrizes e a peça foi estabelecido um valor significativamente elevado, devido às possíveis carepas que se formam durante o forjamento e não possuir lubrificação.

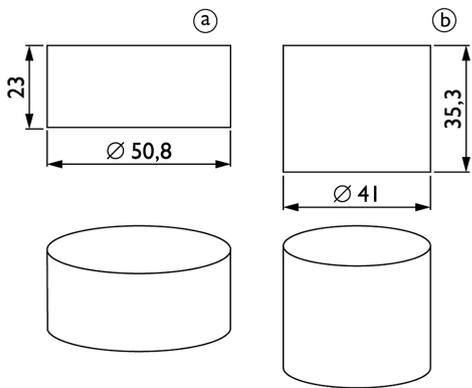


Figura 3. Corpos de prova.

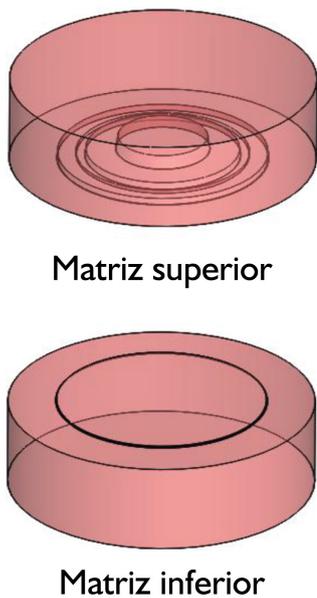


Figura 4. Matrizes para obtenção da forma final dos corpos de prova.

Com a peça forjada em matriz fechada, obtém-se a peça flangeada (Figura 5). A partir das dimensões finais da peça forjada é aplicada a TEP.

Como ponto de partida, a peça é discretizada (Figura 6), dividindo-a em 22 tubos concêntricos. Com o valor do raio de cada tubo é calculado a variação radial de um tubo em relação ao seu subsequente. Essas variações radiais são usadas na Equação 9, onde se usa  $\Delta r_i (r_i - r_{i-1})$  para calcular as variações das tensões nos tubos.

Tabela 1. Dados do alumínio AA 6351

$m_1$	0,0043
$m_2$	0,055
$m_3$	0,089
Tensão de Escoamento inicial ( $kf_0$ )	299,7 N/mm <sup>2</sup>

Fonte: Hensel e Spittel [7].

Tabela 2. Dados de entrada

Temperatura da matriz ( $T_{matriz}$ )	150°C
Temperatura da peça ( $T_{peça}$ )	450°C
Dimensões do Tarugo a	Ø 50,8 × 23 mm
Dimensões do Tarugo b	Ø 41 × 35,3 mm
Velocidade da ferramenta ( $v_m$ )	6,7 mm/s
Atrito interfacial ( $\mu$ )	0,4

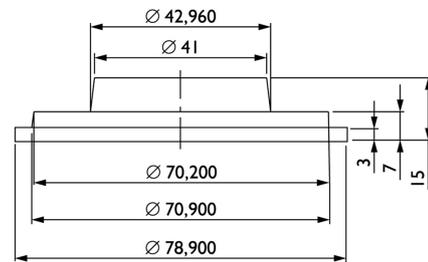


Figura 5. Flange após o forjamento do tarugo cilíndrico.

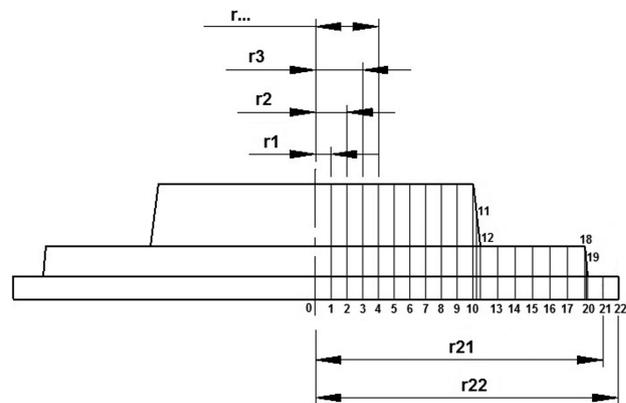


Figura 6. Discretização do flange.

**Tabela 3.** Resultado dos cálculos de TEP para tarugo de  $\varnothing 50,8 \times 23$  mm

Linha	$r_i$	$\Delta r_i$	$\alpha_i$	$h_i$	$\varphi_i$	$\dot{\varphi}_i$	$k_{fi}$	$g(r_i)$	$f(r_i)$
i	[mm]	[mm]	[rad]	[mm]		[s <sup>-1</sup> ]	[MPa]		
0	0,00		0,00	15,00	0,43	0,45	38,45	2,05	0,05
1	2,05	2,05	0,00	15,00	0,43	0,45	38,45	2,05	0,05
2	4,10	2,05	0,00	15,00	0,43	0,45	38,45	2,05	0,05
3	6,15	2,05	0,00	15,00	0,43	0,45	38,45	2,05	0,05
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	35,45	0,17	0,00	3,00	2,04	2,23	48,35	12,89	0,27
21	37,45	2,00	0,00	3,00	2,04	2,23	48,35	12,89	0,27
22	39,45	2,00	0,00	3,00	2,04	2,23	48,35	12,89	0,27
Tubo	$\sigma_{ri}$	$\Delta\sigma_{ri}$		$\sigma_{zi}$	$\bar{\sigma}_{zi}$	$\Delta A_i$	$F_i$		
i	[MPa]	[MPa]		[MPa]	[MPa]	[mm <sup>2</sup> ]	[kN]		
#	-1402,9	0,0		-1441,3	#	#	#		
1	-1260,8	-142,1		-1299,3	-1370,3	13,2	-18,1		
2	-1132,8	-128,1		-1171,2	-1235,3	39,6	-48,9		
3	-1017,4	-115,4		-1055,8	-1113,5	66,0	-73,5		
.	.	.		.	.	.	.		
.	.	.		.	.	.	.		
.	.	.		.	.	.	.		
20	-65,3	-5,3		-113,7	-114,9	38,9	-4,5		
21	-25,8	-39,5		-74,1	-93,9	458,0	-43,0		
22	0,0	-25,8		-48,3	-61,2	483,2	-29,6		

**Tabela 4.** Resultado dos cálculos de TEP para tarugo de  $\varnothing 41 \times 35,3$  mm

Linha	$r_i$	$\Delta r_i$	$\alpha_i$	$h_i$	$\varphi_i$	$\dot{\varphi}_i$	$k_{fi}$	$g(r_i)$	$f(r_i)$
i	[mm]	[mm]	[rad]	[mm]		[s <sup>-1</sup> ]	[MPa]		
0	0,00		0,00	15,00	0,86	0,45	41,28	2,20	0,05
1	2,05	2,05	0,00	15,00	0,86	0,45	41,28	2,20	0,05
2	4,10	2,05	0,00	15,00	0,86	0,45	41,28	2,20	0,05
3	6,15	2,05	0,00	15,00	0,86	0,45	41,28	2,20	0,05
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	35,45	0,17	0,00	3,00	2,47	2,23	50,47	13,46	0,27
21	37,45	2,00	0,00	3,00	2,47	2,23	50,47	13,46	0,27
22	39,45	2,00	0,00	3,00	2,47	2,23	50,47	13,46	0,27
Tubo	$\sigma_{ri}$	$\Delta\sigma_{ri}$		$\sigma_{zi}$	$\bar{\sigma}_{zi}$	$\Delta A_i$	$F_i$		
i	[MPa]	[MPa]		[MPa]	[MPa]	[mm <sup>2</sup> ]	[kN]		
#	-1422,5	#		-1462,5	#	#	#		
1	-1278,4	-144,1		-1318,3	-1390,4	13,2	-18,4		
2	-1148,4	-129,9		-1188,4	-1253,4	39,6	-49,6		
3	-1031,3	-117,1		-1071,3	-1129,8	66,0	-74,6		
.	.	.		.	.	.	.		
.	.	.		.	.	.	.		
.	.	.		.	.	.	.		
20	-66,0	-5,4		-114,9	-116,2	38,9	-4,5		
21	-26,1	-40,0		-74,9	-94,9	458,0	-43,5		
22	0,0	-26,1		-48,9	-61,9	483,2	-29,9		

### 3 RESULTADOS

A partir da equação ordinária diferencial para o método dos tubos (Equação 3), inicia-se procedimento matemático, aplicando-se as equações subsequentes, visando calcular o esforço em cada tubo concêntrico. O procedimento é executado de forma sequencial, sendo que cada estágio subsequente depende dos dados anteriores para prosseguir os cálculos. O modelo matemático foi aplicado para ambos os corpos de prova.

A Tabela 3 mostra a aplicação dos cálculos, baseadas na TEP para o corpo de prova de  $\varnothing 50,8 \times 23$  mm. O somatório das forças localizadas em cada tubo permite a determinação do valor da força total de 1.717,9 kN ou 174,9 toneladas.

A Tabela 4 mostra a aplicação da TEP para o corpo de prova de  $\varnothing 41 \times 35,3$  mm. O somatório das forças localizadas em cada tubo permite a determinação da força total de 1.741,7 kN ou 177,4 toneladas.

### 4 CONCLUSÕES

Com o desenvolvimento da Teoria Elementar da Plasticidade para o forjamento dos dois tarugos cilíndricos, obtiveram-se resultados para cada situação. O segundo tarugo

( $h = 35,3$ ) precisou de uma força maior que o primeiro tarugo ( $h = 23$ ) em função de ter uma altura inicial maior, acarretando em uma deformação na direção da altura maior para chegar a mesma altura final para a formação do flange. No entanto, observou-se que o segundo corpo apresentou um valor de esforço total um pouco superior, devido a sua altura inicial ser maior, requerendo, para a formação da peça, maiores deformações localizadas, acarretando em maiores tensões localizadas.

A aplicação da TEP é relativamente simples, podendo se comportar como uma ferramenta de trabalho eficiente nas indústrias quando há o conhecimento pleno do modelo matemático, reduzindo custo de implantação de *software*.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento das bolsas de estudo, ao Laboratório de Transformação Mecânica (LdTM) e à Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

### REFERÊNCIAS

- 1 Schaeffer L. Forjamento. Porto Alegre: Editora Imprensa Livre; 2001.
- 2 Edelman F, Drucker DC. Some extensions of elementary plasticity theory. *Journal of the Franklin Institute*. 1951;251(6):581-605. [http://dx.doi.org/10.1016/0016-0032\(51\)90406-1](http://dx.doi.org/10.1016/0016-0032(51)90406-1).
- 3 Fereshteh-Saniee F, Jaafari M. Analytical, numerical and experimental analyses of the closed-die forging. *Journal of Materials Processing Technology*. 2002;125-126:334-340. [http://dx.doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00295-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00295-9).
- 4 Schaeffer L. Conformação mecânica. 2. ed. Porto Alegre: Editora Imprensa Livre; 2004.
- 5 Martins P, Rodrigues J. Tecnologia mecânica. Lisboa: Escolar; 2005. Método da Fatia Elementa; p. 389-411. vol. 1.
- 6 Schaeffer L, Rocha AS. Conformação mecânica: cálculos aplicados em processos de fabricação. Porto Alegre: Editora Imprensa Livre; 2007.
- 7 Hensel A, Spittel T. Kraft- und Arbeitsbedarf bildsamer Formgebungsverfahren. Leipzig: Deutscher Verlag für Grundstoffrie; 1978.

Recebido em: 22 Maio 2015

Aceito em: 29 Jul. 2015