


# Aplicação e análise dos métodos soma cumulativa e média móvel exponencialmente ponderada em dados autocorrelacionados para o monitoramento e controle do processo de flotação de minério de ferro tanckcell

Juliano César Bispo de Lisboa <sup>1\*</sup> 

Ana Carolina Oliveira Santos <sup>1</sup> 

Carlos Henrique de Oliveira <sup>1</sup> 

## Resumo

Em usinas de beneficiamento de minério de ferro, a flotação é um processo essencial para atingir padrões de qualidade desejados, em que a gestão eficiente das variáveis controláveis pode ser obtida pelo monitoramento de pequenas variações dos teores de dióxido de silício ( $\text{SiO}_2$ ) no concentrado. O objetivo dos estudos aqui relatados é a aplicação e análise de cartas de controle por variáveis, de um estudo de caso, em uma situação real de uma flotação de uma mineradora, utilizando o gráfico das somas cumulativas (CUSUM) e da média móvel exponencialmente ponderada (EWMA), para monitorar o teor de  $\text{SiO}_2$ . Os procedimentos metodológicos utilizados para essa pesquisa foram organizados em etapas, onde um conjunto de dados de um período definido, foram analisados e tratados para posterior construção das cartas adequadas para o processo da flotação. Os resultados dessa pesquisa mostraram que foi possível, por meio da análise e comparação, a construção dos gráficos CUSUM e EWMA, para servir ao monitoramento do teor de  $\text{SiO}_2$  no processo de flotação, desde que conhecida a natureza dos dados com distribuição não normal, com testes e procedimentos, de modo a interromper a autocorrelação, comprovando-se o uso correto das cartas de controle. Essa pesquisa demonstrou, por meio da análise de comparação das duas cartas, ser possível, com maior capacidade, utilizar o gráfico EWMA, para um monitoramento do teor de contaminação no concentrado, que influencia diretamente na qualidade do minério de ferro, produto final da flotação.

**Palavras-chave:** Flotação; Carta de controle; Soma cumulativa; Média móvel exponencialmente ponderada (EWMA).

## Application and analysis of the cumulative sum and exponentially weighted moving average methods in autocorrelated data for monitoring and controlling the tanckcell iron ore flotation process

## Abstract

In iron ore processing plants, flotation is an essential process to achieve desired quality standards, in which efficient management of controllable variables can be obtained by monitoring small variations in silicon dioxide ( $\text{SiO}_2$ ) content in the concentrate. The objective of the studies reported here is the application and analysis of control charts by variables, from a case study, in a real situation of a mining flotation, using the cumulative sum graph (CUSUM) and the exponentially weighted moving average (EWMA), to monitor the  $\text{SiO}_2$  content. The methodological procedures used for this research were organized into stages, where a set of data from a defined period were analyzed and processed for the subsequent construction of appropriate charts for the flotation process. The results of this research showed that it was possible, through analysis and comparison, to construct the CUSUM and EWMA graphs, to serve the monitoring of the  $\text{SiO}_2$  content in the flotation process, as long as the nature of the data with non-normal distribution is known, with tests and procedures, in order to interrupt the autocorrelation, proving the correct use of the control charts. This research demonstrated, through the comparison analysis of the two charts, that it is possible, with greater capacity, to use the EWMA chart, for a monitoring the contamination content in the concentrate, which directly influences the quality of the iron ore, the final flotation product.

**Keywords:** Flotation; Control chart; Cumulative sum (CUSUM); Exponentially weighted moving average (EWMA).

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, Itabira, MG, Brasil.

\*Autor correspondente: lisboa.eng@gmail.com



## 1 Introdução

O setor de mineração utiliza em suas usinas de beneficiamento, o processo denominado flotação para explorar as diferenças das características de superfície, do mineral de valor e do material indesejado (sílica). A flotação de espuma consiste em um processo de natureza físico-química, complexo e envolve três fases (sólidos, água e espuma) com muitos subprocessos e interações [1]. O tratamento de minérios, embora essencialmente técnico em suas aplicações práticas, não pode desconsiderar o aspecto econômico. Na prática, é impossível obter uma separação completa dos constituintes minerais. De maneira geral, quanto maior o teor dos concentrados, maior é a perda, resultando em recuperações mais baixas [2]. Além disso, a operação de flotação exige que os equipamentos assegurem algumas características fundamentais, nas quais se destacam-se a geração e dispersão de bolhas de ar, o transporte do mineral de interesse e a redução da turbulência na interface polpa-espuma [3]. Estes itens estão associados às variáveis controláveis de domínio e atuação pelos operadores diretamente do sistema de controle da planta, onde a característica de qualidade associada é o teor de  $\text{SiO}_2$  no concentrado. E, nesse sentido, justifica-se a aplicação prática das cartas para o monitoramento e controle do processo da flotação.

O Controle Estatístico de Processo (CEP) é um conjunto de métodos utilizados para planejar, monitorar e aprimorar um processo produtivo. Isso é feito por meio da coleta de amostras e da aplicação de procedimentos estatísticos, com o objetivo de assegurar que o processo opere de maneira estável e dentro dos limites predefinidos [4]. A Figura 1 apresenta o CEP aplicado a um processo de flotação composto por uma entrada, um conjunto de variáveis controláveis e uma saída. Essa saída é capaz de representar uma medida das características de qualidade tanto do processo quanto do produto [5].

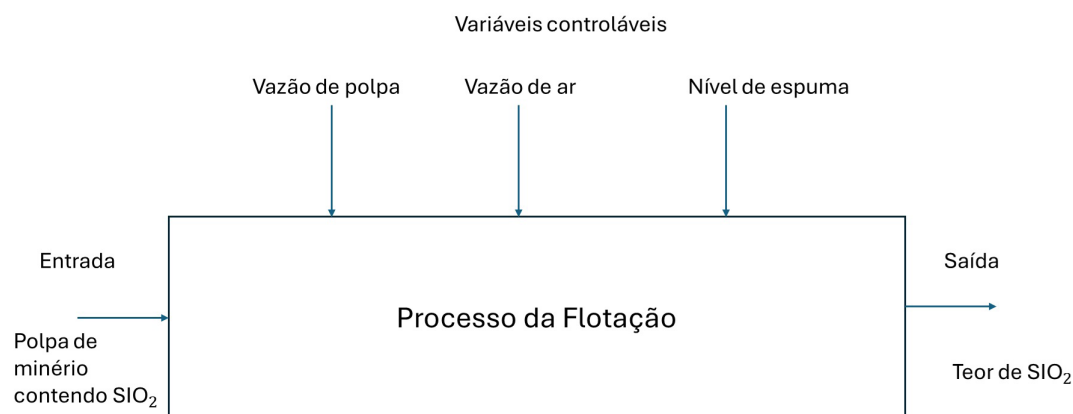
No processo de flotação existe uma grande variabilidade do teor de  $\text{SiO}_2$ . Por isso, o monitoramento e controle da variável de saída do teor de  $\text{SiO}_2$  no concentrado final da flotação têm uma importância econômica considerável na mineração.

Diante desse cenário, é necessário identificar rapidamente quaisquer variações na média dessa variável de qualidade, a fim de propiciar à equipe operacional alertas para investigações no processo, permitindo atuar nas variáveis controláveis (vazão de polpa, nível de camada de espuma e vazão de ar) em tempo hábil, mantendo a qualidade do processo sob controle estatístico.

O gráfico de controle é uma representação de uma característica de qualidade medida ou calculada a partir de uma amostra temporal, contendo uma linha horizontal central (Linha Central - LC) que correspondente ao valor médio do processo sob controle estatístico. Duas outras linhas representam os limites de controle: um superior (Limite Superior de Controle - LSC) e um inferior (Limite Inferior de Controle - LIC). Esses limites devem ser definidos de tal forma que, se o processo estiver sob controle, todos os pontos amostrais se situarão entre eles [5]. A representação de uma carta de controle e seus respectivos limites pode ser observada conforme Figura 2.

Os gráficos estatísticos de controle de processo convencionais são elaborados sob a suposição de que a distribuição do processo em questão é normal, o que, na prática, muitas vezes não se confirma [6]. No processo de flotação de minério, a característica de qualidade de interesse é o teor de  $\text{SiO}_2$  - que consiste em uma impureza, comprometendo a qualidade do produto final de ferro. Além disso, os dados desse processo exibem autocorrelação e uma distribuição não normal, o que inviabiliza a aplicação de gráficos de controle tradicionais [7].

Nesse contexto, as abordagens não paramétricas tornam-se relevantes quando a distribuição dos dados analisados não segue a normalidade [8]. Para este estudo, as cartas de controle das somas cumulativas (*cumulative sum graph* - CUSUM) e da média móvel exponencialmente ponderada (*exponentially weighted moving average* - EWMA) foram comparadas a fim de validar a eficiência na identificação de deslocamentos médios do processo, utilizando uma simulação de uma amostra de referência. Isso porque estudos mostraram que o método EWMA mostrou-se mais eficiente, sendo capaz de identificar mudanças nos cenários de forma



**Figura 1.** Entradas e saídas de um processo de flotação.

mais rápida. Observou-se uma diferença na velocidade de resposta da tendência de crescimento do EWMA e demonstrou a adequação da carta de controle EWMA para o monitoramento online de processos [9].

Dessa maneira, o presente estudo tem como objetivo analisar o potencial de aplicação das cartas de controle CUSUM e EWMA para o monitoramento da variável de teor de  $\text{SiO}_2$  no processo de flotação de minério de ferro processada em tankcell.

Além disso, neste trabalho, buscou-se contribuir para a construção do conhecimento, com foco na aplicação e análise de cartas de controle.

O escopo se limita à comparação dos métodos CUSUM e EWMA, visando identificar qual deles apresenta maior capacidade de lidar com o problema de alarmes falsos, contribuindo assim para o monitoramento do teor de  $\text{SiO}_2$  na flotação de uma mineradora no estado de Minas Gerais.

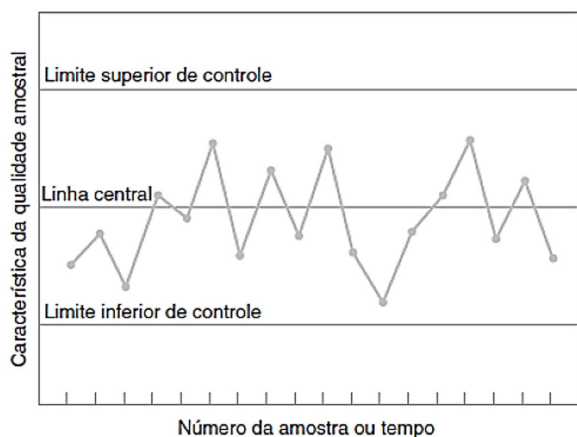


Figura 2. Representação de uma carta de controle.

## 2 Materiais e métodos

Os dados coletados e empregados no presente estudo foram oriundos de uma mina de minério de ferro, de uma grande mineradora no estado de Minas Gerais. A área da flotação, objeto desse estudo, é composta por 3 linhas de processo, denominadas como linhas 1, 2 e 3. A linha 1 foi definida como objeto de estudo desse trabalho e é representada no fluxograma de processo - Figura 3. A linha 1 da flotação é composta por células de flotação (CF), que consiste em cinco etapas de concentração do minério (*rougher*, *cleaner*, *re cleaner*, *scavenger I e scavenger II*) e é alimentada por uma bomba de polpa (BP).

Conforme apresentado na Figura 3, a etapa 1 é chamada “*rougher*”, onde se obtém um concentrado pobre e um rejeito que ainda contém teores dos minerais úteis. Na etapa 2, o concentrado passa por uma segunda lavagem, denominada “*cleaner*”, onde são produzidos um concentrado e um rejeito de teores elevados. O material remanescente da etapa *rougher* é enviado para a etapa 4, chamada “*scavenger*”, onde se obtém um rejeito muito pobre (rejeito final) e um concentrado que recupera os minerais úteis, mas que ainda não é suficientemente rico para ser considerado produto final. Tanto o rejeito *cleaner* quanto o concentrado *scavenger* ainda contém minerais úteis, por isso são retornados à célula *rougher*. No processo estudado, o produto final ainda passa pela etapa 3, denominada “*re cleaner*”, após a recirculação do fluxo, para separar os minerais úteis.

Com base nessa perspectiva, o método de pesquisa utilizado nesta pesquisa consiste em modelagem e simulação, que envolve o uso de técnicas matemáticas para descrever o comportamento de um sistema produtivo ou de suas partes [10,11].

Fundamentada em evidências quantitativas que investigaram o comportamento da variável de qualidade

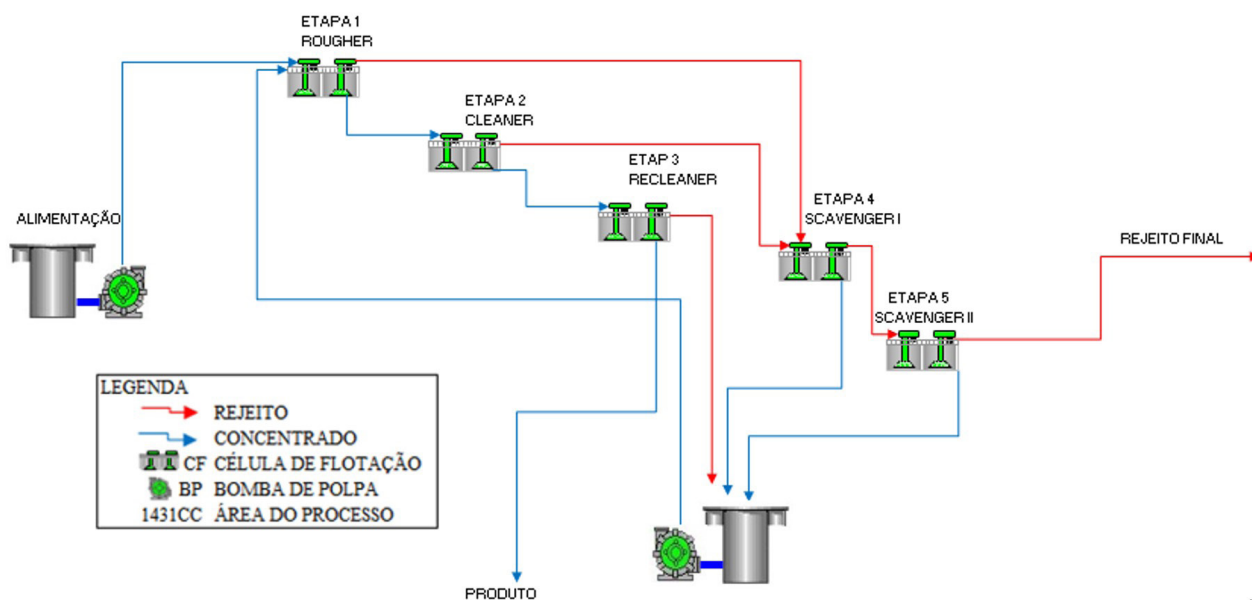


Figura 3. Fluxograma de processo da Linha 1 da Flotação.

relacionada ao teor de  $\text{SiO}_2$  em um processo de flotação real, e com base em dados históricos, foi possível obter respostas quantitativas para os resultados da pesquisa por meio da parametrização e uso de um *software* estatístico, garantindo a aplicação correta das cartas de controle.

Inicialmente, foi realizada a verificação de *outliers* com base nos dados brutos históricos do ano de 2022, utilizando um gráfico *boxplot* gerado por um *software* estatístico. Foram considerados *outliers* os valores acima de 3,67% do teor de sílica, conforme Figura 4. Dos 2.845 dados brutos analisados, foram identificados 152 *outliers*. Com um intervalo de confiança de 95%, os dados ficaram entre 1,13% e 1,21%, com uma mediana de 1,17%. O primeiro quartil foi de 0,75% e o terceiro quartil de 1,95%.

Na sequência, com base na Equação 1, foi realizada uma análise de autocorrelação dos dados para medir analiticamente o nível de autocorrelação ( $r_k$ ) ao longo de uma série temporal.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad k = 0, 1, \dots, k \quad (1)$$

em que:

$t$ : instante no tempo;

$k$ : defasagem entre as observações (espaçamento de tempo ou *lag*);

$n$ : quantidade de observações;

$x_t$ : valor observado no instante  $t$ ;

$\bar{x}$ : média dos valores observados;

$r_k$ : nível de autocorrelação.

Seguindo essa abordagem, a estratégia utilizada neste trabalho foi a análise para a definição de um valor ideal de espaçamento (*lag*) e calculou-se o nível de autocorrelação para diversas defasagens ( $k$ ), até que se encontrasse um  $(r_k) < 2\sqrt{n}$ , a fim de se interromper a autocorrelação encontrada nos dados.

Um algoritmo foi desenvolvido para ajustar os dados do ano de 2022, após a remoção dos *outliers*, ao padrão de

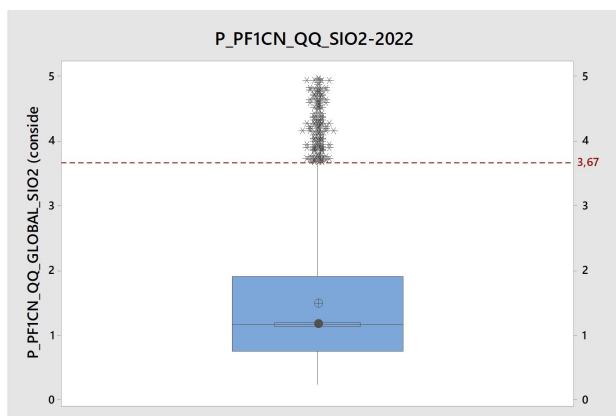


Figura 4. Boxplot dos dados de 2022 do teor de  $\text{SiO}_2$ .

formatação necessário. A média dos dados foi estabelecida para a construção da função de autocorrelação.

Assim, foi utilizada a técnica de Validação Cruzada, conhecida como *K-Fold*, para dividir o *dataset* em blocos. Essa abordagem visou encontrar um valor de *lag* viável para o monitoramento, sem comprometer a representatividade da base amostral.

O código do algoritmo é apresentado na Tabela 1, que apresenta a variação do índice *K-Fold*, percorrendo o *dataset* de 1 a 80. Essa análise resultou na Função de Autocorrelação, permitindo identificar o *lag* ideal das interações.

Conforme a Tabela 1, a variação do índice *K-Fold* de 1 e 2 resultou nos *lags* 46 e 20, indicando uma defasagem inviável para o processo da flotação, uma vez muitas das amostras seriam descartadas e a necessidade de monitoramento é diária.

Foi observado que, a partir do índice *K-Fold* de 3, com 948 amostras, obteve-se um ( $r_k$ ) viável e concluiu-se uma configuração de defasagem (*lag*), com  $k=3$ , capaz de interromper a autocorrelação dos dados.

Para a avaliação da normalidade, utilizou-se o teste de *Anderson-Darling* (AD). A estatística AD é utilizada para calcular o valor de  $p$ , que ajuda a determinar a melhor adequação da distribuição aos dados. O valor de  $p$  foi inferior ao nível de significância de 5%, indicando que os dados não apresentaram distribuição normal, conforme Figura 5.

Assim, o teste de normalidade foi um procedimento estatístico que auxiliou a pesquisa na confirmação da condição descrita na literatura. Quando os dados apresentam características de uma distribuição não normal, as cartas CUSUM e EWMA, propostas neste trabalho, são as mais adequadas [5].

O algoritmo do gráfico CUSUM tabular, trabalha acumulando desvios de  $\mu_0$  que estão acima do alvo, com uma estatística  $C^+$ , e acumulando desvios de  $\mu_0$  que estão abaixo do alvo, com outra estatística  $C^-$ . As estatísticas  $C^+$  e  $C^-$  são chamadas de CUSUMs unilaterais superior e inferior, onde os valores iniciais são  $C_0^+ = C_0^- = 0$  e  $K$  é usualmente chamado de valor de referência (ou valor de tolerância ou de

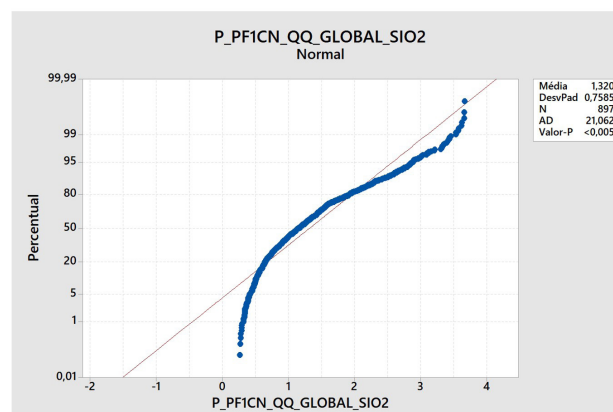


Figura 5. Teste normalidade da flotação.

**Tabela 1.** Teste autocorrelação dos dados do teor de Si

Índice K-Fold	<i>n</i> _amostras	<i>rk</i>	<i>rk</i> desejado	<i>lag</i> ideal
1	2845	0,029410964	0,037496338	46
2	1422	0,047834148	0,053037152	20
3	948	0,044579974	0,06495698	3
4	711	-0,02894103	0,07500586	3
5	569	-0,024074883	0,083844362	3
6	474	-0,056915768	0,091863042	3
7	406	-0,059469574	0,099258333	3
8	356	-0,058151883	0,105999788	3
9	316	0,112317667	0,11250879	2
10	284	-0,030308782	0,118678166	3
11	259	0,006190836	0,124273953	3
12	237	-0,004500345	0,12991396	3
13	219	-0,006692714	0,135147476	3
14	203	0,004596931	0,140372481	3
15	190	-0,080704336	0,14509525	3
16	178	0,126078665	0,149906338	2
17	167	-0,055385616	0,154764647	3
18	158	-0,057838583	0,159111457	3
19	150	-0,052046336	0,163299316	3
20	142	0,012559041	0,167836272	3
21	135	-0,02176249	0,172132593	3
22	129	-0,002166905	0,176090181	3
23	124	0,002426315	0,179605302	3
24	119	0,18011141	0,183339699	2
25	114	0,063204896	0,187317162	3
26	109	0,037460717	0,191565257	3
27	105	0,033614028	0,195180015	3
28	102	0,016770717	0,198029509	3
29	98	0,149954788	0,202030509	2
30	95	0,050843869	0,20519567	3
31	92	0,032969229	0,208514414	3
32	89	0,169253913	0,211999576	2
33	86	0,134582865	0,215665546	3
34	84	0,139725696	0,21821789	3
35	81	0,151490825	0,222222222	3
36	79	0,141701119	0,22501758	3
37	77	0,121806074	0,227921153	3
38	75	0,068509945	0,230940108	3
39	73	0,081656855	0,234082294	3
40	71	0,199329048	0,237356332	3
41	69	0,174533777	0,240771706	3
42	68	0,158879576	0,242535625	3
43	66	0,201778059	0,246182982	3
44	65	0,229041197	0,248069469	3
45	63	0,221163091	0,251976315	3
46	62	0,202282069	0,254000254	3
47	61	0,180646896	0,25607376	3
48	59	0,191117264	0,260377822	3
49	58	0,227758858	0,262612866	3
50	57	0,214072795	0,264906471	3
51	56	0,205967233	0,267261242	3
52	55	0,186676848	0,269679945	3
53	54	0,157306799	0,272165527	3
54	53	0,125898509	0,274721128	3
55	52	0,085678376	0,277350098	3
56	51	-0,076088976	0,280056017	3
57	50	0,163140912	0,282842712	2
58	49	0,113192032	0,285714286	2
59	48	0,082418029	0,288675135	3
60	47	0,210101584	0,291729983	3
61	47	0,210101584	0,291729983	3
62	46	0,234156556	0,294883912	3
63	45	0,251167422	0,298142397	3
64	44	0,253083541	0,301511345	3
65	44	0,253083541	0,301511345	3
66	43	0,249805278	0,304997141	3
67	42	0,224196897	0,3086067	3
68	42	0,224196897	0,3086067	3
69	41	0,225548607	0,312347524	3



**Tabela 1.** Continuação...

Índice K-Fold	$n_{amostras}$	$rk$	$rk$ desejado	$log$ ideal
70	41	0,225548607	0,312347524	3
71	40	0,205549948	0,316227766	3
72	40	0,205549948	0,316227766	3
73	39	0,207916646	0,320256308	3
74	38	0,178316296	0,324442842	3
75	38	0,178316296	0,324442842	3
76	37	0,194315105	0,328797975	3
77	37	0,194315105	0,328797975	3
78	36	0,205795957	0,333333333	3
79	36	0,205795957	0,333333333	3

folga), sempre escolhido a meia distância entre o valor alvo  $\mu_0$  e o valor da média fora de controle  $\mu_1$ , cujo interesse é detectar rapidamente. Assim,  $K$  é a metade da magnitude da mudança e o CUSUM tabular pode ser calculado conforme Equações 2 a 4:

$$C_i^+ = \max \left[ 0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+ \right] \quad (2)$$

$$C_i^- = \max \left[ 0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^- \right] \quad (3)$$

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} \quad (4)$$

onde:

$\mu_0$ : valor alvo;

$K$ : valor de referência;

$x_i$ : valor observado.

Ainda, o CUSUM tabular é planejado pela escolha do intervalo de decisão  $H$ . Em geral, recomenda-se que esses parâmetros sejam selecionados de modo a fornecer bom desempenho do comprimento médio da sequência (CMS). Foram realizados vários estudos analíticos sobre o desempenho do CUSUM, e as diretrizes gerais para a seleção de  $H$  e  $K$  são expressas como  $H = h$  e  $K = k\sigma$ , onde  $\sigma$  representa o desvio padrão da variável amostral utilizada na construção do CUSUM. Utilizando-se  $h = 4$  ou  $h = 5$  e  $k = 0,5$ , resultará, em geral, em um CUSUM que tem boas propriedades do CMS contra uma mudança de cerca de  $1\sigma$  na média do processo [12].

Deste modo, para o teor de  $\text{SiO}_2$ , considerando-se o alvo  $\mu_0 = 1,23\%$  e a média histórica  $\mu_1 = 1,3202\%$ , encontrou-se o valor de  $d$  (deslocamento que se deseja detectar), pelo método do meio da lacuna, onde:

$$d = (1,3202 - 1,23) / 2$$

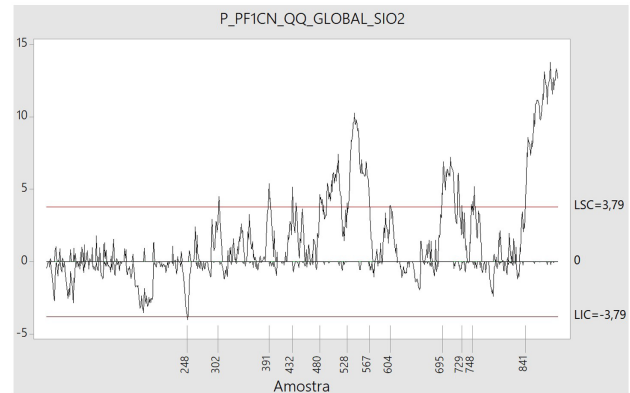
$$d = 0,0451$$

Considerando-se o desvio padrão da base histórica de 1,0021, o valor de  $K$  encontrado foi:

$$k = 5\sigma_0$$

$$k = 5 * 0,7585 = 3,7925$$

A carta de controle CUSUM é apresentada na Figura 6, considerando-se a parametrização calculada anteriormente.



**Figura 6.** Carta de Controle CUSUM do teor de  $\text{SiO}_2$ .

Por meio dela, é possível detectar mudanças persistentes de um processo, a detecção imediata de estados fora de controle e fornecem estimativas de quando ocorreu e da sua magnitude.

O gráfico EWMA foi obtido por meio dos valores da estatística  $Y_i$ , conforme Equação 5.

$$Y_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Y(i-1) \quad (5)$$

onde:

$i$  = o número da ordem do dado observado e para o valor inicial adota-se  $Y_0 = \mu_0$  (valor alvo ou valor médio em controle do teor de  $\text{SiO}_2$ );

$\lambda$  = constante de amortecimento, tal que  $0 < \lambda \leq 1$ ;

$X_i$  = valor observado;

$Y_0 = \mu_0$  (valor alvo ou valor médio em controle do teor de  $\text{SiO}_2$ ).

A variância para o teor de  $\text{SiO}_2$  pode ser calculada conforme a Equação 6. Vale ressaltar que, à medida que a variável  $i$  aumenta, a quantidade expressa por  $[1 - (1 - \lambda)^2]$  tende ao valor 1.

$$\sigma^2(Y_i) = \sigma^2(\lambda / (2 - \lambda)) [1 - (1 - \lambda)^2] \quad (6)$$

onde:

$\sigma$  = desvio padrão;

$Y_i$  = média;

$\lambda$  = constante de amortecimento.

As Equações 7, 8 e 9 foram utilizadas para estabelecer o limite superior de controle (LSC), a linha média (LM) e o

limite inferior de controle (LIC), levando em consideração a variação de  $k$  sigma entre esses limites.

$$LSC = \mu_0 + k\sigma_0\sqrt{(\lambda / (2 - \lambda))} \quad (7)$$

$$LM = \mu_0 \quad (8)$$

$$LIC = \mu_0 - k\sigma_0\sqrt{(\lambda / (2 - \lambda))} \quad (9)$$

onde:

$\sigma$  : é o desvio padrão do processo quando em controle;

$\mu_0$ : valor alvo;

$\lambda$ : constante de amortecimento.

Os valores tabelados para os parâmetros da carta EWMA ( $\lambda=0,2$  e  $L=3$ ) apresentam bons resultados no cálculo do comprimento médio da sequência (CMS), resultando em poucos alertas falsos [12].

O gráfico de controle da média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) pode ser considerado como uma média ponderada de todas as observações passadas e correntes. Desse modo, a carta EWMA foi construída conforme a referência, utilizando os parâmetros estabelecidos ( $\lambda = 0,2$  e  $L=3$ ), e considerando o período amostrado de 2022, com as devidas tratativas para a remoção da autocorrelação, conforme Figura 7.

Sendo assim, existem vários tipos de gráficos de controle que podem ser aplicados ao processo e a escolha do gráfico adequado depende do tipo de informação, do tamanho da amostra e da periodicidade da coleta das observações. Os gráficos de controle compartilham características comuns, como a linha central, que representa o desempenho médio, e os limites de controle, que indicam a faixa de variação esperada no processo [13].

### 3 Resultados e discussão

Para realizar a comparação entre as duas cartas, o CMS foi inicialmente calculado, considerando os dados coletados após a remoção da autocorrelação. A Equação 10 fornece uma

aproximação do cálculo do CMS para um CUSUM unilateral ( $C^+$  ou  $C^-$ ) [14]:

$$CMS_0 = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad (10)$$

onde:

$\Delta = \delta^* - k$  para  $C^+$ ,  $\Delta = -\delta^* - k$  para  $C^-$  e  $b = h + 1,166$ ;

$\delta^*$  = é a mudança na média, em unidades de  $\sigma$ , para qual deve ser calculado o CMS;

$h$ : é o intervalo de confiança.

Por simetria, para calcular o do CUSUM bilateral a partir dos valores das estatísticas unilaterais e, de acordo com [5], utiliza-se a Equação 11:

$$\frac{1}{CMS_0} = \frac{1}{CMS^+} + \frac{1}{CMS^-} \quad (11)$$

O  $CMS_0$  é o comprimento médio da sequência, próximo a 370 (processo sob controle). Optou-se por valores próximos aos parâmetros que apresentaram um desvio padrão  $\sigma = 1$ .

Deste modo, o cálculo considerando os dados históricos do processo da flotação coletados foi realizado de modo que o  $CMS_1$  foi de 14,35:

$$\delta^* = d$$

$$\delta^* = 0,0451$$

$$b = h + 1,166$$

$$b = 3,7925 + 1,166 = 4,9585$$

$$CMS_1 = \frac{\exp(-2(-0,0451)4,9585) + 2(-0,0451)4,9585 - 1}{2(-0,0451)^2}$$

$$CMS = 28,70$$

$$\frac{1}{CMS_1} = \frac{1}{28,70} + \frac{1}{28,70}$$

$$\frac{1}{CMS_1} = \frac{2}{28,70}$$

$$CMS_1 = 14,35$$

Conforme Montgomery [5], na prática, valores de  $\lambda$  no intervalo de 0,05 a 0,25 geralmente demonstram bom desempenho, sendo  $\lambda=0,05$ ,  $\lambda=0,10$  e  $\lambda=0,20$  escolhas populares. Uma regra prática estabelece o uso de valores menores de  $\lambda$  para detectar mudanças menores, enquanto que  $L=3$  (os limites de três sigmas usuais) demonstra eficácia, especialmente com valores de  $\lambda$  mais elevados. Neste estudo, optou-se por utilizar  $\lambda=0,20$  e  $L=3$  na construção da carta EWMA.

No que diz respeito ao CMS da carta EWMA, os parâmetros foram adotados conforme a literatura, utilizando-se os valores correspondentes da Tabela 2. Optou-se por valores próximos aos parâmetros que apresentaram um desvio padrão equivalente de 0,7585.

Assim, os valores calculados e tabelados indicam que o gráfico EWMA demonstra um CMS que resulta em menos pontos fora dos limites de controle em comparação ao gráfico CUSUM.

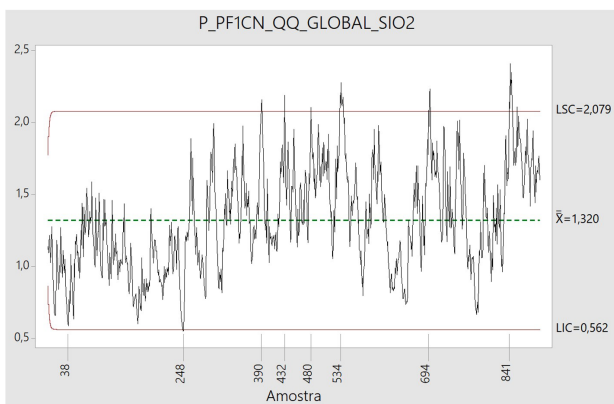


Figura 7. Carta de Controle EWMA do teor de  $SiO_2$ .

**Tabela 2.** Comprimentos Médios de Sequências para diferentes parâmetros da carta EWMA

Mudança na média	$L = 3,054$	$L = 2,998$	$L = 2,962$	$L = 2,814$	$L = 2,615$
	$\lambda = 0,40$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$
0	500	500	500	500	500
0,25	224	170	150	106	84,1
0,50	71,2	48,2	41,8	31,3	28,8
0,75	28,4	20,1	<b>18,2</b>	15,9	16,4
1,00	14,3	11,1	10,5	10,3	11,4
1,50	5,9	5,5	5,5	6,1	7,1
2,00	3,5	3,6	3,7	4,4	5,2
2,50	2,5	2,7	2,9	3,4	4,2
3,00	2,0	2,3	2,4	2,9	3,5
4,00	1,4	1,7	1,9	2,2	2,7

Esta característica é crucial no processo de flotação, que envolve diversas variáveis controladas. Intervenções realizadas pelos colaboradores na planta, ao menor sinal de problema, muitas vezes resultam em instabilidade do processo em vez de controlá-lo.

Nas observações feitas nas duas cartas de controle, foi possível constatar que a carta EWMA teve significativamente menos pontos fora dos limites de controle em comparação com a carta CUSUM.

No gráfico CUSUM, observou-se uma quantidade maior de pontos fora do limite superior de controle, destacados nas amostras. Em particular, na amostra 302, houve uma discrepância em relação ao gráfico EWMA, que não apresentou sinalização. Além disso, notou-se uma maior persistência de pontos fora do limite superior nas amostras 393 a 394 e 433 a 438 do gráfico CUSUM. Isso ocorreu devido ao efeito da soma acumulada de pequenos desvios, resultando em uma maior sensibilidade de detecção.

A partir da amostra 480, o gráfico CUSUM mostrou um aumento significativo no número de pontos acima do limite superior de controle, persistindo até a amostra 517. Observou-se uma mudança significativa a partir da amostra 528, com uma sequência contínua de pontos acima do limite superior de controle até a amostra 567, e novamente nas amostras 695 a 729.

No gráfico EWMA, um ponto muito próximo do limite inferior de controle foi observado na amostra 38. Isso indica que o EWMA, ao atribuir maior peso às informações mais recentes e menor peso às mais antigas, foi capaz de detectar rapidamente uma mudança inicial. Em contraste, o gráfico CUSUM requer uma série de amostras com sinais positivos ou negativos para acumular o efeito de soma cumulativa.

A partir da amostra 841, o gráfico EWMA mostrou uma mudança mais significativa, com todos os pontos consecutivos acima da média e uma quantidade muito menor de pontos fora dos limites de controle em comparação com o gráfico CUSUM, onde todos os pontos estavam acima do limite superior de controle.

Após a realização dessa análise, pôde-se verificar a possibilidade do uso de ambas as cartas para detectar mudanças na média com pequenas magnitudes. A carta de controle EWMA, com os parâmetros citados na literatura, apresentou

um desempenho superior, com maior capacidade e menor risco de falsos alarmes em comparação à carta CUSUM. Isso evita intervenções desnecessárias no processo, que poderiam prejudicar a estabilidade do processo de flotação.

#### 4 Conclusão

Os resultados deste estudo demonstraram que os gráficos CUSUM e EWMA são eficazes para monitorar o teor de  $\text{SiO}_2$  no processo de flotação, especialmente quando se considera a natureza dos dados, como distribuição não normal, e a aplicação de procedimentos para mitigar a autocorrelação. Isso valida o uso apropriado das cartas de controle.

A validação da maior aplicabilidade da carta de controle EWMA para monitorar o teor de  $\text{SiO}_2$  foi confirmada pelos resultados, que mostraram menos pontos fora dos limites de controle. Isso comprova sua eficácia na detecção e seu bom desempenho para aplicação no monitoramento e controle.

Esta pesquisa demonstrou que é viável utilizar o gráfico EWMA como uma ferramenta para análise comparativa das duas cartas, permitindo à equipe de colaboradores detectar e investigar possíveis problemas e tomar decisões, alcançando objetivos geral e específicos, propostos nesta pesquisa.

A pesquisa demonstrou que, no contexto do processo industrial de flotação, que apresenta dados autocorrelacionados, tanto as cartas de controle CUSUM quanto EWMA são eficazes para o monitoramento. Ambas as opções são capazes de detectar pequenas variações na média.

A pesquisa confirmou que a carta EWMA é mais adequada para o monitoramento do processo de flotação, com menor incidência de alarmes falsos. Essa validação fortaleceu sua aplicação prática, proporcionando uma contribuição significativa para a pesquisa acadêmica sobre o tema.

Em termos práticos, esta pesquisa tem o potencial de contribuir significativamente para a redução do teor de contaminação no concentrado de minério de ferro por meio do monitoramento com o gráfico EWMA. Isso é importante para manter a meta da empresa de controlar o teor de sílica baixo, uma vez que impacta diretamente na qualidade do produto final do processo de flotação.



## Referências

- 1 Wills BA, Napier-Munn TJ. Mineral processing technology: an introduction to the practical aspects of ore treatment and mineral recovery. 7th ed. Brisbane: Elsevier Science & Technology Books; 2006.
- 2 Luz AB, Lins FAF. Introdução ao tratamento de minérios. In: Luz AB, Sampaio JA, França, SCA, editores. Tratamento de minérios. 5ª ed. Rio de Janeiro: CETEM/MCT; 2010. cap. 1; p. 3-22 [acesso em 30 abr. 2024]. Disponível em: <http://mineralis.cetem.gov.br/handle/cetem/712>
- 3 Ribeiro BF. Estudo comparativo entre equipamentos de flotação [monografia]. Belo Horizonte: Departamento de Engenharia de Minas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais; 2015 [acesso em 30 abr. 2024]. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/31469>
- 4 Louzada F, Diniz C, Ferreira P, Ferreira E. Controle estatístico de processos: uma abordagem prática para cursos de Engenharia e Administração. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- 5 Montgomery DC. Introdução ao controle estatístico da qualidade. Rio de Janeiro: LTC; 2016.
- 6 Qiu P. Some perspectives on nonparametric statistical process control. *Journal of Quality Technology*. 2018;50(1):49-65. <http://doi.org/10.1080/00224065.2018.1404315>.
- 7 Mukherjee A, Chong ZL, Khoo MBC. Comparisons of some distribution-free CUSUM and EWMA schemes and their applications in monitoring impurity in mining process flotation. *Computers & Industrial Engineering*. 2019;137:106059. <http://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106059>.
- 8 Li SY, Tang LC, Ng SH. Nonparametric CUSUM and EWMA control charts for detecting mean shifts. *Journal of Quality Technology*. 2010;42(2):209-226. <http://doi.org/10.1080/00224065.2010.11917817>.
- 9 Camargo BB, Silva RP, Paiva EJ, Brito TG. Estudo comparativo entre a aplicação da média móvel e carta de controle da média móvel exponencialmente ponderada para monitoramento de pandemias. *Produção*. 2023;22(3):3127-3161. <http://doi.org/10.14488/1676-1901.v22i3.4577>.
- 10 Miguel PAC, editor. Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações. 2ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier; 2012.
- 11 Berto RMVS, Nakano D. Revisitando a produção científica nos anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção. *Production*. 2013;24(1):225-232. <http://doi.org/10.1590/S0103-65132013005000007>.
- 12 Costa AFB, Epprecht EK, Carpinetti LCR. Controle estatístico de qualidade. 2ª ed. São Paulo: Atlas; 2012.
- 13 Souza GA. Aplicação de gráficos de controle estatístico de processo para avaliação de desempenho de estações de tratamento de água [dissertação]. Belo Horizonte: Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais; 2018 [acesso em 30 abr. 2024]. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/BUOS-B9EK3Y>
- 14 Siegmund D. Sequential analysis: tests and confidence intervals. New York: Springer; 1985. <http://doi.org/10.1007/978-1-4757-1862-1>.

Recebido em: 9 Mar. 2024

Aceito em: 16 Out. 2024

Editor responsável: André Carlos Silva - 